Examen d'Analyse Numérique

1ère année ISIMA

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

31 janvier 2013

Durée : 2 heures
Documents autorisés : cours, TD et TP de l'année.

Exercice 1 Soit la matrice tridiagonale $(n \times n)$

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 0 & & \cdots & 0 \\ -1 & \alpha & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & -1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

avec $\alpha \in I\!R$.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont
$$\lambda_j = \alpha - 2\cos(j\theta), \; j = 1, \dots, n$$
où $\theta = 2\pi/(n+1)$.
2. Montrer que le vecteur propre associé à λ_j est
$$v_j = \begin{bmatrix} \sin(j\theta) & \sin(2j\theta) & \cdots & \sin(nj\theta) \end{bmatrix}^T$$
3. Pour quelles valeurs de α la matrice A est-elle définie positive ?

Exercice 2 Etudier suivant les valeurs du paramètre réel a la nature et l'existence des points stationnaires de la fonction de $I\!R^2$ dans $I\!R$
$$f(x, y) = (a^2 + 1)(x^2 + y^2) + 4axy$$

Exercice 3 On considère la fonction quadratique de $I\!R^2$ dans $I\!R$
$$f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 10x_1 - 5x_2$$

1. Mettre f sous la forme $f(x) = 1/2x^TQx - b^Tx$
2. Montrer que f est strictement convexe et possède un unique minimum global x^* que l'on calculera.
3. Représenter dans $I\!R^2$ une courbe de niveau particulière (on définira la base des vecteurs propres et la représentation de f sur la nouvelle base, centrée en x^*).
4. Soit $x^0 = [0 \; 0]^T$ et $d^0 = [1 \; 0]^T$.
Montrer que d^0 est une direction de descente pour f en x^0.
5. Calculer $x^1 = x^0 + t_0 d^0$ où t_0 minimise la fonction $\phi(t) = f(x^0 + td^0)$.
6. Montrer que les directions d^0 et $d^1 = x^* - x^1$ sont conjuguées par rapport à la matrice Q. Que peut-on en déduire ?