D.S. d'Analyse Numérique
ISIMA 1ère année – 29-11-2012

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

Durée : 2heures
Documents autorisés : cours, TD et TP de l'année.

Exercice 1 Soit le problème aux moindres carrés

$$Min\|Ax - b\|^2 \quad (\mathcal{P})$$

où A est de taille $n \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit J un sous-ensemble d'indices dans $\{1, \ldots, n\}$. On se propose de déterminer la variation de l'erreur obtenue en restreignant le problème initial au problème

$$Min\|Ax - b\|^2; x_j = 0 \ \ pour \ \ j \notin J.$$

Soient A_1 de taille $n \times p$, A_2 de taille $n \times q$, $x_1 \in \mathbb{R}^p$ et $x_2 \in \mathbb{R}^q$. On suppose que $rang(A_1) = p$ et que $J = \{p+1 \cdots n\}$.

On pose $A = [A_1 A_2]$ et $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. $\to A(n \times (p+q))$

1. A quelle condition le système $Ax = b$ est-il compatible ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que x réalise le minimum de $\|Ax - b\|^2$. A quelle condition la solution des moindres carrés est-elle unique ?
3. Soit $\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$ une solution des moindres carrés du problème $(\mathcal{P})$. Exprimer $\bar{x}_1$ en fonction de A_1, A_2, b et $\bar{x}_2$.
4. En déduire la relation $A_2^T K_1 (A_2 \bar{x}_2 - b) = 0$ ou K_1 est une matrice à déterminer en fonction de A_1.
5. A quelle transformation linéaire correspond K_1 ?
6. Soit $\tilde{x}_1$ la solution des moindres carrés de $\|A_1 \tilde{x}_1 - b\|^2$. On pose $\bar{m} = \|A\bar{x} - b\|^2$ et $\tilde{m} = \|A_1 \tilde{x}_1 - b\|^2$. Montrer que
$$\tilde{m} - \bar{m} = b^t K_1 A_2 \bar{x}_2$$
Interpréter ce résultat en fonction de l'objectif de l'exercice.
7. Application numérique. Déterminer $\tilde{m}, \bar{m}, \bar{x}, \tilde{x}_1, \mathbf{K}_1$ avec :
$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2 On se propose d'étendre la factorisation $PA = LU$ aux matrices rectangulaires quelconques.

1. Soit une matrice $A(m \times n)$ avec $m \geq n$ de rang n. Montrer qu'il existe une matrice $L(m \times m)$ triangulaire inférieure de diagonale unité, une matrice $U(m \times n)$ triangulaire supérieure et une matrice $P(m \times m)$ de permutation, telles que $PA = LU$. (On donnera la forme précise de la matrice L).

2. Partitionner les matrices L et U trouvées ci-dessus en :

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & | & L_2 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \cdots \\ U_2 \end{bmatrix}$$

avec $L_1(m \times n)$ triangulaire inférieure de diagonale unité, $L_2(m \times (m-n))$, $U_1(n \times n)$, triangulaire supérieure et $U_2((m-n) \times n)$.

Montrer alors que $PA = L_1 U_1$.

3. On va maintenant s'appuyer sur la factorisation précédente pour résoudre le problème de moindres carrés visant à minimiser $\| Ax - b \|_2$ pour un $b \in \mathbb{R}^m$.

Supposons que $A = L_1 U_1$ avec $A(m \times n)$, $L_1(m \times n)$ triangulaire inférieure de diagonale unité et $U_1(n \times n)$ triangulaire supérieure (on a simplement repris la factorisation trouvée à la question précédente en supposant $P = I$ pour simplifier).

   (a) Définir n matrices de Householder $H_1, \ldots, H_n$ (symétriques, orthogonales de taille m) telles que

$$H_n \ldots H_1 L_1 = \begin{bmatrix} L_3 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

   où $L_3(n \times n)$ est triangulaire inférieure.

   Indication : on s'appuiera toujours sur la ligne de L_1 ayant un 1 sur la diagonale en commençant par la dernière.

   Remarque : on ne demande pas le calcul explicite des H_i

   On définit aussi

$$H_n \ldots H_1 b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

   avec $b_1 \in \mathbb{R}^n$ et $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$.

   (b) Montrer que la solution aux moindres carrés qui minimise $\| Ax - b \|_2$ satisfait $Ux = z$ où z est solution de $L_3 z = b_1$. En déduire que l'erreur aux moindres carrés est égale à $\| b_2 \|_2$.

   Ecrire l'algorithme en supposant toujours qu'il n'y a pas de pivots nuls et évaluer sa complexité en nombre de flops.

   (c) Application numérique :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \\ -4 & 10 \\ -4 & 10 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$