Corrigé du D.S. Analyse Numérique du 29 novembre 2012

Exercice 1 1. Le système est compatible si et seulement si $b \in Im(A)$ ou, $rang(A) = rang([Ab])$.

2. La cns est $= A^T Ax = A^T b$. La solution est unique si $rang(A) = n$ (ce qui implique ici que A est inversible et le système $Ax = b$ est toujours compatible).

3. Le système des équations normales s'écrit avec la partition de $A = [A_1\ A_2]$:

$$\begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} [A_1\ A_2] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{bmatrix} b$$

soit

$$\begin{aligned} A_1^T A_1 \bar{x}_1 + A_1^T A_2 \bar{x}_2 &= A_1^T b \\ A_2^T A_1 \bar{x}_1 + A_2^T A_2 \bar{x}_2 &= A_2^T b \end{aligned}$$

Comme $rang(A_1) = p$, la matrice $A_1^T A_1$ est inversible, ce qui permet d'obtenir $\bar{x}_1$ en fonction de $\bar{x}_2$:

$$\bar{x}_1 = (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T (b - A_2 \bar{x}_2)$$

4. En remplaçant $\bar{x}_1$ dans la deuxième équation ci-dessus, on obtient : $A_2^T K_1 (A_2 \bar{x}_2 - b) = 0$ avec :

$$K_1 = I - A_1 (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T$$

5. K_1 est la matrice de projection sur $Im(A_1)^\perp = Ker(A_1^T)$.

6. On a : $\bar{x}_1 = \tilde{x}_1 - (A_1^T A_1)^{-1} A_1^T A_2 \bar{x}_2$, d'où $A\bar{x} = A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 = A_1 \tilde{x}_1 + K_1 A_2 \bar{x}_2$.
Observer que, puisque $b - A\bar{x} \in Ker(A^T)$, et comme $A\bar{x} - A_1 \tilde{x}_1 \in Im(A)$, on a :

$$\tilde{m} - \bar{m} = \|A\bar{x} - A_1 \tilde{x}_1\|^2 = \|K_1 A_2 \bar{x}_2\|^2$$

En utilisant la propriété du projecteur K_1, on en déduit :

$$\tilde{m} - \bar{m} = (b - A_1 \tilde{x}_1)^T K_1 A_2 \bar{x}_2 = b^T K_1 A_2 \bar{x}_2$$

Ce résultat montre que l'erreur d'approximation due au choix de $\tilde{x}_1$ plutôt que $\bar{x}$ sera d'autant plus faible si les colonnes de A_2 sont 'presque' colinéaires avec celles de A_1 ($\Longrightarrow \|K_1 A_2 x_2\| \approx 0$).

7.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5/9 & -2/9 & -4/9 \\ -2/9 & 8/9 & -2/9 \\ -4/9 & -2/9 & 5/9 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{x_1} = \frac{4}{3} \quad \tilde{m} = 1 \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad \bar{m} = 1/2$$

Exercice 2 1. On traîte en premier lieu le cas sans pivot nul en appliquant la méthode de triangularisation de Gauss sur la matrice rectangulaire A. On aura alors $E_{n-1} \dots E_1 A = U$ où chaque matrice élémentaire E_k est carrée de dimension m, la sous-colonne η_k (voir cours p. 30) occupant la position $k = 1, \dots, n$. Il en résulte que les colonnes $n+1, \dots, m$ de chaque matrice E_k sont des colonnes de la matrice identité. La matrice U est $(m \times n)$ triangulaire supérieure ce qui implique que les lignes $n+1, \dots, m$ sont remplies de 0. En appliquant le même principe que dans la méthode vue en cours, on obtient L en inversant le produit $E_{n-1} \dots E_1$ qui a la même forme (en changeant les signes des coefficients sous la diagonale), d'où $L = [L_1 \ L_2]$ avec :

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ & & 1 \\ \vdots & & \vdots \end{bmatrix} \qquad L_2 = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \\ & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

où L_1 est triangulaire inférieure $(m \times n)$ avec des 1 sur la diagonale et L_2, matrice $(m \times m-n)$ correspond aux colonnes $n+1, \dots, m$ de l'identité.

S'il y a des pivots nuls, le raisonnement du cours s'applique toujours : on cumule les permutations successives dans la matrice P $(m \times m)$ pour obtenir $PA = LU$

2. $LU = L_1U_1 + L_2U_2 = L_1U_1$ car U_2 est remplie de 0.
3. (a) On commence par la dernière colonne de L_1 en appliquant une symétrie de Householder sur les lignes $n, \dots, m$ (la première composante est donc égale à 1) pour mettre des 0 aux lignes $n+1, \dots, m$. Pour la colonne suivante, on applique la nouvelle symétrie sur les lignes $n-1, n+1, \dots, m$ en prenant toujours comme première composante le 1 sur la diagonale de L_1. Ainsi, on maintient les 0 déjà obtenus aux itérations précédentes. A l'itération k, on applique la symétrie H_k telle que :

$$H_k \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & \vdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & \ddots \\ & & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où a est la norme du vecteur $\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$ transformé par H_k.

(b) $\|Ax-b\|^2 = \|L_1U_1x-b\|^2$. Posons $z = U_1x \in I\!R^n$ et appliquons la succession de symétries de Householder qui maintiennent la norme euclidienne (on pose $H = H_n \dots H_1$) :

$$\|Ax - b\|^2 = \|HL_1z - Hb\|^2 = \|L_3z - b_1\|^2 + \|b_2\|^2$$

où $Hb = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Mais L_3 est carrée, triangulaire de diagonale non nulle. Il y a donc un unique z satisfaisant $L_3z = b_1$ et l'erreur est simplement égale à $\|b_2\|$. La solution aux moindres carrés s'obtient en résolvant le système triangulaire $U_1x = z$.

(c)

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ 2 & 1 \\ -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad U_1 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 3 & \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$