D.S. Analyse Numérique – ISIMA 1ère Année

V. Barra, J. Koko et Ph. Mahey

2ème Session – 29 août 2013

Exercice 1 Considérons la matrice A et le vecteur b suivants

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. Quel est le rang de A ? Donner une forme générale d'un vecteur de $Im(A)$.
2. Montrer que la dimension de $Ker(A^T)$ est deux, et donner une forme générale d'un vecteur de $Ker(A^T)$.
3. Trouver $b_R \in Im(A)$ et $b_N \in Ker(A^T)$ tels que $b = b_R + b_N$.

Exercice 2 Soit A une matrice $m \times n$ non nulle et b un vecteur de $\mathbb{R}^m$. Soit M la matrice

$$M = \begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^T A & A^T b \\ b^T A & b^T b \end{bmatrix}.$$

1. Supposons que $rang(A) = n$; montrer que M est singulière si et seulement si $b \in Im(A)$.
2. Soit R_M triangulaire supérieure (le facteur de Cholesky de M) telle que

$$R_M^T R_M = M, \qquad \text{où } R_M = \begin{bmatrix} R & z \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

   et R est (non singulière) triangulaire supérieure. Soit x un vecteur qui minimise $\| b - Ax \|_2^2$, où $\|.\|_2$ représente la norme Euclidienne dans $\mathbb{R}^m$. Montrer que x vérifie $Rx = z$ et que la norme du résidu optimal vérifie $\| b - Ax \|_2 = |\gamma|$.

Exercice 3 On note $x = (x_1, x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. Soit f et h les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ données par

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2, \\ h(x) &= 1 - x_1 - x_2. \end{aligned}$$

1. La fonction f est-elle convexe ? Représenter les courbes de niveau de f.
2. On définit la fonction F_ε, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, par

$$F_\varepsilon(x) = f(x) + \frac{1}{2\varepsilon}\left(h(x)\right)^2, \quad \varepsilon > 0.$$

   Déterminer, en fonction de ε, une solution $x(\varepsilon)$ du problème

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} \min F_\varepsilon(x) \\ x \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

3. Calculer

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = \lim_{\varepsilon \to 0} x(\varepsilon).$$

   Calculer $h(x^*)$.