ISIMA 1ère année. Durée : 2h00. Documents autorisés : 2 feuilles A4 manuscrite R/V.
Automates et langages formels. Examen de première session. 2013-2014.

Exercice 1 – (6pts) On considère un alphabet $\mathcal{V} = \{a, b\}$ et les langages $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ respectivement représentés par les expressions régulières $r_1 = ((a+b)(a+b))^*$ et $r_2 = (a+b)^*(aa+bb)(a+b)^*$.

1. Déterminer un AFD M_1 acceptant le langage L_1.
2. Déterminer un AFD M_2 acceptant le langage L_2.
3. Déterminer un AFD M_3 acceptant le langage $L_1 \cup L_2$. Suggestion : si vous n'arrivez pas à trouver directement un AFD, cherchez un AFND puis rendez-le déterministe.
4. En déduire un AFD M_4 acceptant le langage $L_1 \cap L_2$. Suggestion : il suffit de changer l'ensemble des états accepteurs de M_3.

Exercice 2 – (10pts)
Répondez aux questions suivantes en justifiant vos réponses (vous pourrez utiliser des résultats vus en cours ou en TD en les citant explicitement).

1. Soit $\mathcal{L}$ un langage hors contexte quelconque et $\mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}$ un sous-ensemble *fini* de $\mathcal{L}$. On note $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$ le langage $\mathcal{L}$ dans lequel on supprime tous les mots de $\mathcal{L}'$.
   (a) Est-ce que $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$ est un langage régulier ?
   (b) Est-ce que $\mathcal{L} - \mathcal{L}'$ est un langage hors contexte ?
2. Soit l'alphabet $\mathcal{V} = \{a, b\}$ et le langage $\mathcal{L}$ composé de tous les mots ayant un nombre pair de caractères de $\mathcal{V}$ et se terminant par le caractère a. Est ce que $\mathcal{L}$ est un langage régulier ?
3. Soit $\mathcal{L}$ un langage régulier quelconque sur l'alphabet $\mathcal{V} = \{a, b\}$. Soit M un automate fini déterministe (AFD) acceptant $\mathcal{L}$. On construit l'automate M' en remplaçant chaque transition sur le caractère a par une transition sur le caractère b et réciproquement. Est ce que M' est un AFD ? Soit $\mathcal{L}'$ le langage accepté par l'automate M'. Est-ce que $\mathcal{L}' = \overline{\mathcal{L}}$?
4. Soit l'expression régulière $r = a(a+b)^*(b+\lambda)$ (ici λ désigne le mot vide). Quel est le langage $\mathcal{L}$ généré par r ? Décrivez un automate fini déterministe acceptant $\mathcal{L}$. Décrivez une grammaire régulière générant $\mathcal{L}$.
5. Soit $\mathcal{V}$ un alphabet fini et soit $\mathcal{L}$ un langage régulier. Notons $\mathcal{L}'$ l'ensemble de tous les palindromes de $\mathcal{L}$. Est-ce que $\mathcal{L}'$ est un langage régulier ? Est ce que $\mathcal{L}'$ est un langage hors contexte ?

Exercice 3 – (4pts) Machine de Turing. Considérons la machine de Turing M décrite à la figure 1. Dans cette figure, une transition porte une étiquette du type $X; Y; D$ où D est la direction de la tête de lecture/écriture qui peut être L (gauche) ou R (droit). X est le caractère lu sur le ruban et Y est le caractère qui est écrit sur le ruban lors de la transition. Le symbole carré figurant sur les transitions de la machine de Turing de la figure 1 désigne une case blanche (ou symbole blanc).

1. Dites ce que contient le ruban à la fin du traitement des mots suivants : *abb*, *babb*.
2. De manière générale, que contient le ruban lorsque la machine rentre dans l'état accepteur sachant qu'elle prend en entrée un mot w ? (que fait cette machine de Turing ?) Décrivez en Français la manière dont elle réalise cette tâche (décrivez en quelques phrases l'algorithme qu'exécute cette machine de Turing).

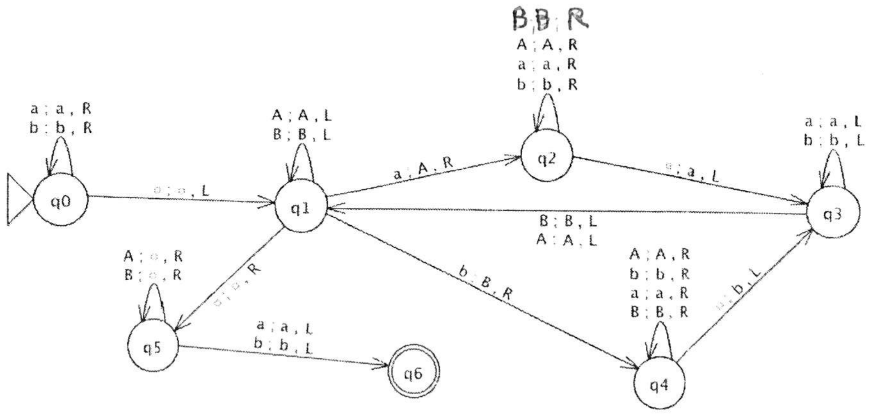

FIGURE 1 – Une machine de Turing. Que fait elle ?