ISIMA 1ère année. 2012-2013

Examen de graphes. 1ère session.

Documents autorisés : support de cours et notes manuscrites (rien d'autre).

Exercice 1 – Graphes pondérés. [2,5 points]

1. Dans le graphe de la figure 1, quel est le poids d'un arbre couvrant de poids minimal ?
2. Dans le graphe de la figure 1, appliquez l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet b. Dessinez l'arbre obtenu. Quelle est la distance entre le sommet b et le sommet d ?

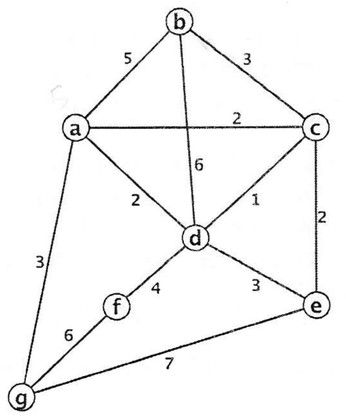

FIGURE 1 – Un graphe pondéré

Exercice 2 – Les amis dans la foule. [2,5 points]

1. Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. Montrer qu'il existe $v, w \in V$ tels que $v \neq w$ et $d_G(v) = d_G(w)$ (où $d_G(a)$ désigne le degré du sommet a dans G).
2. Prouvez que dans une réunion mondaine il y a toujours deux personnes ayant le même nombre d'amis présents.

Exercice 3 – Ordonnancement des tâches de la construction d'un ouvrage. [7 points]

Les opérations mises en jeu dans la construction d'un ensemble hydroélectrique sont les suivantes : (a) Construction des routes d'accès au site du barrage, à la centrale et aux carrières dont seront extraits les matériaux ; (b) Préparation des carrières et terrassements ; (c) Construction d'une cité pour le personnel et administrative ; (d) Commande du matériel électrique et hydraulique ; (e) Construction de la centrale ; (f) Construction des galeries et conduites forcées ; (g) Montage des machines ; (h) Essais de fonctionnement. (i) Formation des personnels sur les machines. L'ordre des opérations et leurs durées est résumé dans le tableau :

Opération	Durée (en mois)	Opérations antérieures
a	4	-
b	6	a
c	4	-
d	12	-
e	10	b,c
f	24	b,c
g	7	a
h	10	d,e,g
i	3	f,h

1. Construisez le graphe des tâches associé au problème (comme vu en cours dans le chapitre "Un problème important d'ordonnancement").
2. Calculer les dates au plus tôt. Quelle est la durée minimum du projet entier ?
3. Calculer les dates au plus tard. Trouvez un chemin critique. Est-il unique ? (justifiez)
4. Si un retard de 1 mois survient sur l'opération (b), est-ce-qu'il peut engendrer un retard sur la date au plus tôt de fin de projet. Si oui, de combien serait ce retard ?

Exercice 4 – Flots et couplage de taille maximum dans un graphe bipartis. [8 points]

Rappels : Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté et non pondéré. Un *couplage* M de G est un sous-ensemble d'arêtes de G deux à deux disjointes (si uv et xy sont deux arêtes quelconques de M alors $u \neq x$ et $u \neq y$ et $v \neq x$ et $v \neq y$). G est *bipartis* si l'ensemble V de ses sommets peut être partitioné en deux sous-ensembles V_1 et V_2 ($V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et $V_1 \cup V_2 = V$; V_1 est l'ensemble des sommets "blancs" et V_2 l'ensemble des sommets "noirs") de telle manière que pour toute arête $e = uv$ de G, u et v ne sont pas dans le même ensemble (chaque arête doit avoir une extrémité noire et l'autre blanche).

A partir d'un graphe bipartis $G = (V, E)$ dont une bipartition de V est V_1 et V_2, construisons un *réseau à flots* de la manière suivante :

- Les sommets du réseau sont ceux de G et on ajoute en plus une source s et un puits t.
- Chaque arête uv de G est transformée : en un arc (u, v) si $u \in V_1$ et $v \in V_2$ ou en un arc (v, u) si $v \in V_1$ et $u \in V_2$ (ces arcs sont donc "orientés de V_1 vers V_2").
- On ajoute tous les arcs de s vers chaque $u \in V_1$ et tous les arcs de chaque $v \in V_2$ vers t.
- Chaque arc du réseau a une *capacité* de 1.

Répondez aux questions suivantes en justifiant vos réponses.

1. Soit M un couplage de taille maximum de G. Montrez qu'il existe un flot de valeur $|M|$ ($|M|$ = taille de M) dans G.
2. Dans le graphe H de la figure 2 :
   (a) Montrez que H est bipartis. Quels sont les deux sous-ensembles V_1 et V_2 de la bipartition ?
   (b) Construisez et dessinez le réseau à flots associé à H, comme décrit plus haut dans l'énoncé.
   (c) Dans ce réseau, déterminez un flot de valeur maximum : dessinez le réseau et sur chaque arc, donnez la quantité de flot qui y circule. Quelle est la valeur de ce flot maximum ? Quelle méthode avez-vous employé pour le trouver ?
   (d) Montrez que le flot que vous avez trouvé est maximum en décrivant une s,t-coupe de capacité minimum : re-dessinez votre réseau, et coloriez les arcs de cette s,t-coupe. Quelle est la capacité de cette coupe ?
   (e) Donnez un couplage de taille maximum de H.

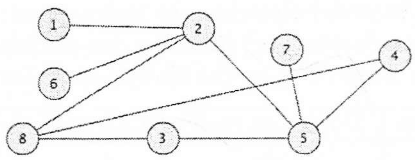

FIGURE 2 – Un graphe H