ISIMA 1ère année

Documents non autorisés

lundi 17 juin 2013

Durée : 2 heures

PROBABILITES

Exercice 1 : Génétique des populations et coalescence (sur 6 points)

On considère une population de N individus.

On supposera dans la suite que cette population a une taille constante (donc égale à N).

On supposera également pour simplifier que les individus se reproduisent comme des clones, et non par reproduction sexuée. Ainsi, chaque individu a un unique parent.

Par ailleurs, on supposera que le temps s'écoule de manière discrète, c'est-à-dire qu'il est constitué d'une succession de pas de temps : t = 0, t = 1, t = 2, etc...

A chaque pas de temps, un individu tiré au hasard meurt et est remplacé instantanément par le descendant d'un des N-1 individus restants.

Par commodité, on supposera que les individus sont dans des cases numérotées, afin de les désigner au cours du temps.

La figure 1 ci-dessous illustre une séquence d'événements possible :

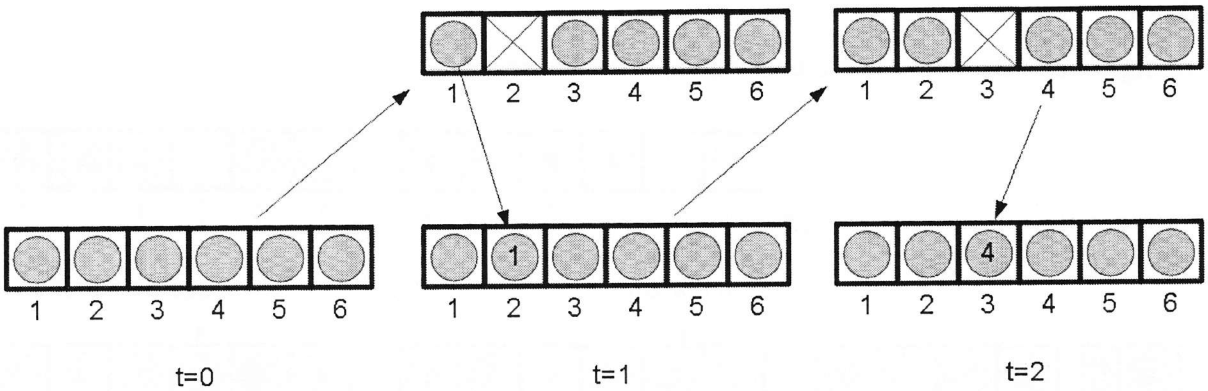

Figure 1: À t=1, l'individu n°2 meurt et est remplacé par un descendant de l'individu n°1.

À t=2, l''individu n°3 meurt et est remplacé par un descendant de l'individu n°4. (NB: on a utilisé N=6 sur la figure, mais **dans l'exercice, on restera dans le cas général où N est fixe mais inconnu**).

Rq: cette dynamique de population est connue en génétique des populations sous le nom de modèle de Moran.

I – Probabilités d'évènements élémentaires (sur 2 points)

1°) À t = 1, quelle est la probabilité que l'individu de la case n°1 meurt ?

2°) En supposant que c'est bien l'individu de la case n°1 qui est mort à t = 1,

a) Quelle est la probabilité que l'individu qui le remplace instantanément soit un descendant de l'individu de la case n°2 ?

b) Expliquer pourquoi la probabilité que l'individu remplaçant celui de la case n°1 soit un descendant de l'individu qui vient de mourir (dans la case n°1) est égale à 0.

3°) Quelle est la probabilité d'observer l'évènement : "l'individu de la case n°2 meurt et est remplacé par un descendant de l'individu de la case n°3" ?

II – Mutations et apparition de la diversité (sur 4 points)

On suppose maintenant qu'initialement (à t = 0), les N individus sont tous identiques génétiquement. En d'autres termes, le génotype des N individus est le même, il sera noté a.

Chaque descendant a une faible probabilité p d'avoir muté. Dans ce cas, il aura un génotype différent de son parent. On supposera qu'il y a un nombre infini de génotypes possibles et que chaque nouvelle mutation produit un génotype totalement nouveau qui n'est pas présent dans la population. Le premier individu qui aura muté aura donc le génotype b, le second individu qui aura muté aura le génotype c, que son parent soit de génotype a ou b. Le troisième individu qui aura muté aura le génotype d, que son parent soit de génotype a, b ou c. Et ainsi de suite.

La figure 2 ci-dessous illustre une séquence d'événements possible :

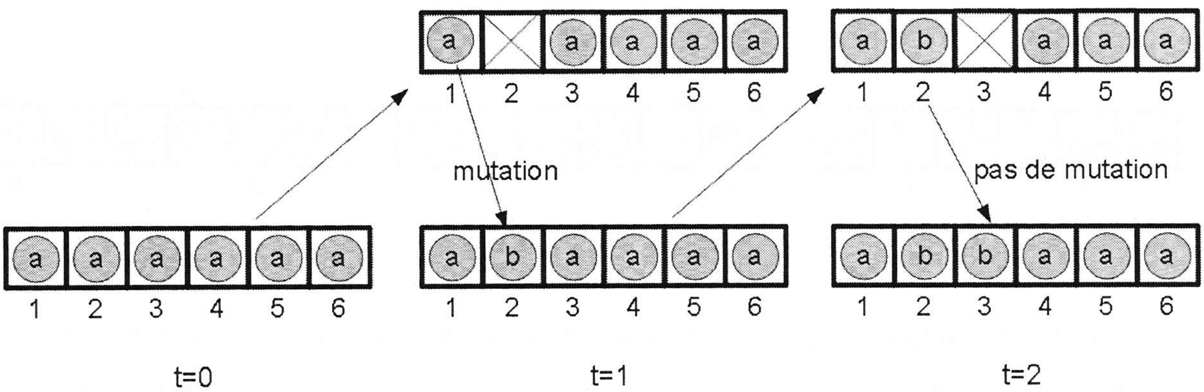

Figure 2: À t=1, l'individu n°2 meurt et est remplacé par un descendant de l'individu n°1. Une mutation se produit si bien que le génotype de l'individu n°2 devient b. A t=2, l''individu n°3 meurt et est remplacé par un descendant de l'individu n°2. Aucune mutation ne se produit, donc le génotype du nouvel individu n°3 est le même que celui de son parent, c'est-à-dire b.

1°) Combien de génotypes différents peut-il y avoir au maximum dans la population de taille N ?

2°) Quelle est la probabilité qu'à t = 1, il y ait un seul génotype dans la population ?

3°) On note A(t) le nombre d'individus de la population qui sont de génotype a au temps t. A(0) vaut donc N. Que vaut l'espérance E [A(1)] ?

4°) Que vaut l'espérance E [A(2)] ? Détailler le raisonnement.

5°) Si A(t) = 0, que vaut E [A(t + 1)] ?

Exercice 2 : Tir à l'arc (sur 7 points)

Deux archers s'affrontent au tir à l'arc. La cible est constituée de trois zones A, B et C, qui rapportent respectivement 10, 5 et 1 point(s). Un tir hors de ces trois zones ne rapporte pas de point. Le jeu consiste à tirer trois flèches et le score final est la somme des trois flèches (on considérera ces tirs comme indépendants). Un archer qui tire dans les zones A (première flèche), A (deuxième flèche) et C (troisième flèche) aura donc 10 + 10 + 1 = 21 points.

Le premier archet, M. Flute, tire au centre (zone A) 6 fois sur 10, au milieu (zone B) 1 fois sur 10 et sur les bords (zone C) 1 fois sur 10. (Il tire donc hors zone 2 fois sur 10).

Le deuxième archet, M. Saxo, tire en zone A 5 fois sur 10, en zone B 3 fois sur 10, en zone C 1 fois sur 10 et hors zone 1 fois sur 10.

1°) Quelle est l'espérance du score après avoir tiré une flèche obtenu par M. Flute ?

2°) Quelle est l'espérance du score final obtenu (3 flèches) par M. Flute ?

3°) Mêmes questions pour M. Saxo.

4°) M. Flute et M. Saxo tirent chacun une flèche. Remplir le tableau ci-dessous dans lequel la case à l'intersection de la ligne $i \in \{0, 1, 5, 10\}$ et de la colonne $j \in \{0, 1, 5, 10\}$ donne la probabilité pour que M. Flute obtienne i points et M. Saxo obtienne j points (on précisera l'hypothèse qu'il est nécessaire de faire pour justifier cette probabilité). La colonne Total doit donner, à la ligne $i \in \{0, 1, 5, 10\}$ la probabilité pour que M. Flute obtienne i points, indépendamment du résultat de M. Saxo et la ligne Total doit donner, à la colonne $j \in \{0, 1, 5, 10\}$ la probabilité pour que M. Saxo obtienne i points, indépendamment du résultat de M. Flute.

M. Flute \ M. Saxo	10	5	1	0	Total
10					
5					
1					
0					
Total					

5°) Quelle est la probabilité que M. Flute ait un score identique à celui de M. Saxo après un seul tir de flèche ?

6°) Quelle est la probabilité que M. Flute ait un score strictement plus élevé que M. Saxo après un seul tir de flèche ?

7°) Quelle est la probabilité que M. Flute ait un score identique ou plus élevé que celui de M. Saxo, conditionnellement au fait que les deux archers n'ont pas tiré hors zone ?
après un seul tir de flèche.

Exercice 3 : Fonction d'une variable aléatoire continue (sur 2 points)

Soient X une variable aléatoire uniforme sur $[-2 ; 3]$ et g la fonction définie par $g(x) = | x |$.

1°) Quel est l'espace d'arrivée de la variable aléatoire g(X) ?

2°) Calculer la densité de probabilité de g(X).

Exercice 4 : Vecteur aléatoire continu (sur 5 points)

Soit V=(X , Y) un vecteur aléatoire uniforme sur $[-1 ; 1] \times [-1 ; 1]$.

1°) Soit A l'évènement $X + Y \geq 0$. Représenter <u>graphiquement</u> l'espace d'arrivée de V et l'évènement A en hachurant ce dernier.

2°) D'après cette représentation graphique, déterminer P(A).

3°) Soit F_V la fonction de répartition de V. Calculer $F_V(x,y)$ pour tout (x,y) appartenant à l'espace d'arrivée de V.

4°) On note V|A la loi conditionnelle de V sachant $V \in A$. Soit $F_{V|A}$ la fonction de répartition de V|A. Calculer $F_{V|A}(x,y)$ pour tout (x,y) appartenant à A. Pour simplifier, on s'intéressera uniquement au cas où $x \geq y$ (par symétrie, on calculerait aisément l'autre cas).

5°) Soit $f_{V|A}$ la densité de probabilité de V|A. Calculer $f_{V|A}(x,y)$ pour tout (x,y) appartenant à A.

6°) En notant V|A = (X|A, Y|A), calculer E (X|A).

G(g(X))