Examen de Programmation Linéaire
ISIMA 1ère année, juin 2013, durée 2h
documents de cours autorisés

Rendre chaque exercice sur une feuille séparée (ne pas oublier de mettre le nom !)

Exercice n° 1. Dans le jeu *online* "War of War", il existe plusieurs unités de combat, les Aaa (A), les Bbb (B) et les Ccc (C). Chaque unité a un potentiel de combat à distance (A_d), à moyenne portée (A_m), au corps-à-corps (A_c) et un coût unitaire d'achat :

unité	A_d	A_m	A_c	coût
A	100	30	10	150
B	30	80	50	200
C	0	0	100	100

1.1. L'infâme Bubule a une troupe de 400 Aaa, 25 Bbb et 80 Ccc. Modéliser le problème consistant à construire au coût minimal une armée au moins équivalente à celle de Bubule sur chacun des trois potentiels de combat.

On suppose que créer une unité de chaque type consomme des cercles (R_1), carrés (R_2) et croix (R_3). Les ressources R_1 et R_2 sont consommées à la création alors R_3 est consommée à chaque tour de jeu (ressource d'entretien). On dispose d'un stock initial pour chaque ressource et d'une capacité de production par tour. On peut aussi acheter des ressources sur le marché :

ressource	A	B	C	stock	prod/tour	prix d'achat unitaire
R_1	60	80	10	15000	100	3
R_2	40	100	150	7000	250	5
R_3	5	7	10	1800	600	1

1.2. Modéliser le problème consistant à créer l'armée de Bubule en 2 tours de jeu au coût le plus faible possible. On décrira chaque type de variables ainsi que les contraintes (entre autre sur la taille de l'armée, sur l'évolution des stocks).

1.3. En s'inspirant de la première question, déterminer une armée au moins équivalente à celle de Bubule et qui minimise sa consommation d'entretien (en R_3).

Exercice n° 2. Considérons le programme linéaire suivant

$$
(P)\left\{\begin{array}{lrcrcr}
\text{maximiser} & -x_1 & + & 2x_2 & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\
 & x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \\
 & & & x_2 & \leq & 3 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}\right.
$$

L'objectif de cet exercice est de trouver une solution optimale pour (P), s'il en existe une.

Première partie : phase I de la méthode du **simplexe avec dictionnaires**

2.1. Donner le programme linéaire auxiliaire (PA) qui doit être résolu lors de cette phase.

2.2. Donner le dictionnaire réalisable initial associé à (PA).

2.3. Expliquer pourquoi il est préférable de choisir x_2 comme variable entrante.

2.4. Trouver un dictionnaire optimal associé à (PA).

2.5. Que peut-on conclure ?

Deuxième partie : phase II de la méthode **révisée du simplexe révisé**

2.6. Donner l'ensemble des matrices et vecteurs utilisés pour décrire le programme linéaire (P).

2.7. Donner la base optimale trouvée à la question ~~(d)~~ 2.4, la matrice de base et le vecteur des valeurs des variables de base associés.

2.8. Résoudre le programme linéaire (P) avec la méthode révisée du simplexe.

2.9. Quelle est la solution optimale de (P). Est-elle unique ?

2.10. Soit P_Δ le programme linéaire obtenu à partir de (P) en ajoutant la valeur réelle $\Delta \geq -3$ au membre de droite de la troisième contrainte (i.e., 3). Pour quelles valeurs de Δ la base optimale trouvé à la question (h) reste

1. réalisable ?
2. optimale ?

Exercice n° 3. Le domaine $\mathbb{D}$ est défini par les contraintes :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & x_2 & \geq & 6, \\ -x_1 & + & 5x_2 & \leq & 40, \\ 2x_1 & - & x_2 & \leq & 10, \\ x_1 & - & x_2 & \leq & 3, \\ & & x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array}\right.$$

3.1. Tracer un graphique soigné du domaine $\mathbb{D}$.

3.2. Résoudre le problème $\mathcal{D}_{5,-3}$ défini par

$$\begin{array}{rrcr} z_{5,-3} = & 5x_1 & - & 3x_2 \quad (\max) \\ & (x_1, x_2) & \in & \mathbb{D}. \end{array}$$

Plus généralement, le problème $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$ est défini par

$$\begin{array}{rrcr} z_{\alpha,\beta} = & \alpha x_1 & + & \beta x_2 \quad (\max) \\ & (x_1, x_2) & \in & \mathbb{D}. \end{array}$$

3.3. Écrire le dual $\mathcal{P}_{\alpha,\beta}$ de $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$.

3.4. À quelle(s) condition(s) sur les nombres α et β le point $\hat{x} = (0, 8)$ peut-il être une solution optimale de $\mathcal{D}_{\alpha,\beta}$? Que peut-on conclure pour $\alpha = -2$ et $\beta = 5$?