Examen de Programmation Linéaire

ISIMA 1ère année, septembre 2013, durée 2h

documents de cours autorisés

Rendre chaque exercice sur une feuille séparée (ne pas oublier de mettre le nom !)

Exercice n° 1. La société Sapouss est spécialisée dans la production et vente de plantes. Elle commercialise notamment des bambous qu'elle cultive. Pour les bambous d'intérieur, elle en vend en deux catégories : de 10 à 20 cm (C_1) et supérieur ou égal à 20 cm (C_2). On suppose qu'un bambou pousse de 5 cm par semaine. Créer une nouvelle pousse de bambou (C_0) coûte 4 euros et la pousse mesure 5 cm. Les frais d'entretien sont de 2 euros par plante dans la serre. Les stocks initiaux et la demande sur 3 semaines (S_1 à S_3) sont résumés dans le tableau suivant :

catégorie	prix de vente	stock initial	S_1	S_2	S_3
C_1	5	100	50	80	30
C_2	10	60	20	30	20

1.1. Dessiner un schéma montrant l'évolution de la quantité du stock de plantes disponibles en C_0 / C_1 / C_2 pour chaque période.

1.2. Formuler le problème consistant à déterminer la production et l'évolution du stock de chaque catégorie de manière à satisfaire la demande et maximiser les profits.

1.3. On suppose que la demande n'est pas connue avec certitude et que les valeurs fournies représentent une valeur moyenne issue de l'historique des ventes. C'est le scénario moyen (M). On souhaite envisager un scénario pessimiste (P) dans lequel la demande est inférieure de 20 %. On doit déterminer maintenant le planning de production des pousses (C_0). L'évolution des stocks dépendra du scénario. Pour les coûts, on considère 60 % de chance d'avoir le scénario M et 40 % le scénario P. Proposer une nouvelle formulation permettant de prendre en compte les deux scénarios (indice : seules les variables de stock dépendent des scénarios et doivent être indexées à la fois sur les périodes et les scénarios).

Exercice n° 2. Les deux questions sont indépendantes.

2.1. Considérons le programme linéaire ci-dessous

$$
(P)\begin{cases}
\max & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\
& 2x_2 + x_3 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_3 \leq 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{cases}
$$

1. Utiliser la méthode du simplexe **avec dictionnaires** pour trouver une solution optimale du programme linéaire (P). Vous utiliserez **la règle du plus grand coefficient pour le choix de la variable entrante.**
2. Écrire le programme linéaire dual de (P).
3. Utiliser le dictionnaire optimal trouvé à la question 1 pour donner une solution optimale pour le programme linéaire dual de (P). (remarque : vous ne ferez aucun calcul !)

2.2. Considérons le programme linéaire suivant

$$
(Q)\begin{cases}
\text{maximiser} & -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 6x_4 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 10 \\
& -x_1 + x_3 - x_4 \leq -4 \\
& -x_2 - x_3 + x_4 \leq -3 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{cases}
$$

Utiliser la méthode révisée du simplexe à deux phases pour trouver, s'il en existe, une solution optimale pour le programme linéaire (Q). Vous respecterez obligatoirement les règles suivantes :

1. si plusieurs variables sont candidates pour entrer en base, appliquer la règle du plus petit indice (i.e., règle de Bland) ;
2. au début de chaque itération, préciser très clairement
   - la base courante,
   - la matrice de base associée et
   - la solution de base associée ;
3. tout symbole représentant un objet mathématique utilisé (e.g., matrice, vecteur) devra avoir été introduit auparavant ;
4. à la fin de la résolution, les valeur et solution optimales trouvées, s'il en existe, devront être données explicitement.

Remarque : la première phase ne devrait pas nécessiter plus de deux itérations.

Exercice n° 3. Le programme linéaire $\mathbb{P}_a$ est défini par :

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrl}
w_a = & 10y_1 & + & 3y_2 & - & 6y_3 & - & 30y_4 & & & \text{(max)} \\
\text{s.c.} & & & & & & & & & & \\
& 2y_1 & + & 4y_2 & + & 3y_3 & - & 3y_4 & \leq & a, & (1) \\
& 7y_1 & - & 3y_2 & - & 5y_3 & - & y_4 & \leq & 35, & (2) \\
& & & & & & & \multicolumn{3}{r}{y_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots 4,} &
\end{array}
$$

où a est un nombre réel. On note y_5 et y_6 les variables d'écart associées aux contraintes (1) et (2) respectivement.

3.1. En utilisant la méthode révisée du simplexe, trouvez à quelles conditions sur a la base $I_1 = \{y_1, y_6\}$ est optimale.

3.2. Écrire le dual $\mathbb{D}_a$ du programme linéaire $\mathbb{P}_a$.

3.3. Représenter soigneusement le domaine $\mathcal{D}$ associé au programme linéaire $\mathbb{D}_a$.

3.4. Quel sommet de $\mathcal{D}$ correspond au cas où la base I_1 est optimale ?

3.5. Quand le point $\hat{x} = (\frac{3}{2}, 1)$ est-il une solution optimale de $\mathbb{D}_a$?