Examen de Programmation Numérique - ISIMA 1ère année
26 août 2013 – Durée 1h30

J. KOKO, N. KLEMENT et A. TANGUY

Exercice 1 Ecrire une fonction Fortran `normf` qui calcule (sans boucle) la norme de Frobenius d'une matrice A, de taille $m \times n$, définie par

$$\| A \|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

La matrice A est passée en argument comme tableau de profil implicite.

Exercice 2 Soit A une matrice $m \times n$. Traduire l'expression Fortran suivante

```
do j=1,n
   A(:,j)=(/ (1.d0/dble(i+j-1), i=1,m) /)
end do
```

Exercice 3 Pour résoudre un système linéaire tridiagonal, on dispose de formules simplifiées. Une matrice tridiagonale peut être stockée sur 3 vecteurs a, b et c sous la forme

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n \end{bmatrix}.$$

La décomposition L et U se réduit simplement à deux vecteurs ℓ et u, de longueurs $n-1$ et n, qu'on calcule simplement à l'aide des formules

$$u_1 = b_1 \tag{1}$$

$$\ell_i = \frac{a_i}{u_{i-1}}, \quad i = 2, \ldots, n \tag{2}$$

$$u_i = b_i - \ell_i c_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n. \tag{3}$$

La résolution de $Ax = f$ se fait en deux étapes, en utilisant le vecteur auxiliaire w, soit

$$w_1 = f_1, \quad \text{puis } w_i = f_i - \ell_i w_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, n \tag{4}$$

$$x_n = \frac{w_n}{u_n}, \quad \text{et } x_i = \frac{1}{u_i}\left(w_i - c_i x_{i+1}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{5}$$

Ecrire un sous-programme Fortran, dénommé `tridiag`, qui résout un système linéaire tridiagonal. La matrice est donnée sous la forme de 3 vecteurs a, b, c.