Examen de calcul différentiel ISIMA première année, septembre 2013.

1 Exercice

On se donne une fonction f dont le graphe passe par les points suivants, pour $i = 0, 1, 2, 3$:

$$\begin{pmatrix} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ y_i & 0 & 2 & 16 & 36 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la base de Lagrange associée aux points x_0, x_1, x_2, x_3.
2. En déduire le polynôme p d'interpolation de Lagrange associé aux points (x_0, y_0),...,(x_3, y_3).
3. Retrouver l'expression du polynôme p par l'algorithme de Newton.
4. Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange q associé aux points (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$ et $(x_4, y_4) = (4, 96)$. En déduire une estimation de la valeur $f(1,5)$.

2 Exercice

Soit la courbe $\vec{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \dfrac{4}{5}\cos(2t), \\ y(t) = 1 - \sin(2t), \\ z(t) = -\dfrac{3}{5}\cos(2t). \end{cases}$

1. Définir $a, b \in \mathbb{R}$ et la courbe $\vec{q} : s \in [a, b] \to \vec{q}(s) = \vec{r}(t)$ pour que s soit la coordonnée curviligne intrinsèque usuelle.
2. Donner le vecteur tangent unitaire en un point de la courbe.
3. Donner le vecteur normal unitaire en un point de la courbe et la courbure.
4. Donner le vecteur binormal unitaire en un point de la courbe et la torsion.
5. En déduire que la courbe est plane.

3 Exercice

Soit $\vec{f}$ le champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^2$ par : $\vec{f}(x, y) = (x^3, -y^3)$.
Soit D le domaine de $\mathbb{R}^2$: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, soit Γ son bord.
Soit I l'intégrale double $I = \displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$.

1. Calculer I directement.
2. Paramétrer Γ en trois morceaux.
3. Calculer la circulation de $\vec{f}$ le long de ces trois morceaux. En déduire I.
4. Comparer les résultats à l'aide de la formule de Green–Riemann.

4 Exercice

On considère l'équation différentielle d'ordre 2, pour $t \in]-1, 1[$:

$$y''(t) - \frac{2t}{1-t^2}y'(t) + \frac{6}{1-t^2}y(t) = 0, \qquad y(-0,5) = -0,\overset{125}{\cancel{25}}, \quad y'(-0,5) = -1,5. \qquad (1)$$

1. Vérifier que $y(t) = 0,5(3t^2 - 1)$ est une solution du problème (1) sur $]-1, 1[$.

   On considère le système différentiel d'ordre 1, de fonction inconnue $\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ t.q. :

$$\vec{u}\,'(t) = \vec{f}(t, \vec{u}(t)), \qquad \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \qquad (2)$$

   où :

$$\vec{f}(t, y, z) = \left\{ \begin{array}{l} f_1(t, y, z) = z \\ f_2(t, y, z) = \dfrac{2t}{1-t^2}z - \dfrac{6}{1-t^2}y \end{array} \right\}, \qquad \vec{u}_0 = \begin{pmatrix} -0,\overset{125}{\cancel{25}} \\ -1,5 \end{pmatrix}.$$

2. Vérifier : si $\vec{u} = (y, z)$ est solution de (2), alors $z'(t) = y''(t)$, et y est solution de (1).
3. Soit $h > 0$. Ecrire pour (2) le schéma d'Euler explicite de pas h.
4. En prenant un pas de temps $0,1$, en déduire des valeurs approchées aux points $-0,4$ et $-0,3$ pour $y(t)$ solution de (1).