

Problème 1 (4)

On s'intéresse aux probabilités de panne d'une machine. La durée de vie d'une machine suit une loi exponentielle de taux $\lambda = 2$ pannes/an. La durée de réparation ou de remplacement est supposée négligeable.

1- Quelle est la loi de probabilité suivie par la durée de vie de ce système, si le nombre de réparations est $n > 2$? Déterminer sa densité.

2- Quelle est la probabilité que 2 pannes se produisent en une année ?

Sachant que 2 pannes se sont produites en une année, quelle est la probabilité d'avoir une panne au cours du premier mois, au cours du premier jour ?

Que pensez-vous de la répartition des pannes dans l'intervalle de temps d'un an ?

On considère **2 machines** identiques et on suppose que les durées de bon fonctionnement sont indépendantes.

3- Quelle est la loi de probabilité suivie par la durée de vie du système de 2 machines en parallèle ? De 2 machines en série ? Déterminer les fonctions de répartition et les densités.

Problème 2 (5)

Un système de production comporte 3 machines indépendantes en série et un stock de produits finis. Une pièce usinée sort d'une machine et y retourne avec probabilité $1/4$, elle passe à la suivante avec la même probabilité $1/4$. Les probabilités de transition vers le stock sont respectivement $1/2$, $1/2$ et $3/4$.

1- Ce processus définit-il une chaîne de Markov ? Quelle est sa matrice de transition P ?

2- Tracer son graphe des transitions.

3- Déterminer les classes d'états.

4- Existe-t-il une distribution stationnaire ? Est-elle unique ?

5- Déterminer une distribution stationnaire ?

6- Montrer que la chaîne de Markov est convergente.

7- Quelle est la limite du vecteur des probabilités d'état quand le nombre de transitions n tend vers l'infini ? En déduire la limite de P^n quand n tend vers l'infini.

8- Déterminer le nombre moyen de transitions nécessaires pour atteindre le stock la première fois en partant de la première machine.

9- En considérant que la machine n° 3 est en panne (remplacée par un container poubelle), quelle est la probabilité qu'une pièce partant de la machine n° 1 arrive au stock ?

TSVP - suite du sujet au verso >>>

Problème 3 (4)

Le téléphone d'un secrétariat a la possibilité de mettre un seul appel en attente. Le téléphone sonne, la secrétaire décroche traite l'appel, un nouvel appel est automatiquement mis en attente, l'appel en cours se termine et l'appel en attente est traité. Lorsqu'un appel est en attente les appels arrivant sont rejetés. Les appels arrivent suivant une loi de Poisson de taux λ . La durée d'une conversation est supposée suivre une loi exponentielle de taux μ .

- 1- Caractériser le processus stochastique de traitement des appels.
 - 2- Tracer le graphe des transitions du processus.
 - 3- Caractériser la station file d'attente à l'aide de la notation de Kendall.
- Sans calcul et à l'aide des documents de cours exprimer les probabilités d'état à l'équilibre ?
Doit-on utiliser une condition de stabilité ?
- 4- Quelle est la probabilité de rejet d'un appel ?
 - 5- Quel est le taux d'occupation (au téléphone) de la secrétaire ?
 - 6- Quel est le nombre moyen d'appels traités ? En attente ?

Problème 4 (4+3)

Il s'agit d'étudier un réseau ouvert composé d'une file d'attente à un seul serveur avec retour de clients. Les clients arrivent, à l'entrée du réseau, suivant une loi de Poisson de taux λ et le service est exponentiel de taux μ . Les clients sortant de la station y retournent avec une probabilité α .

- 1- Tracer le réseau et expliciter le vecteur q et la matrice P .
- 2- Déterminer le taux d'arrivée à la station. Quelle est la condition de stabilité du réseau ?
- 3- Déterminer le nombre moyen de clients dans le réseau ainsi que le temps moyen de séjour en fonction de λ .
- 4- Montrer que ce réseau est équivalent à une file M/M/1 et préciser ses caractéristiques.

On considère le réseau fermé de 3 stations M/M/1 en série avec retour de la sortie de la troisième sur l'entrée de la première. Les stations ont le même taux de service μ .

Il y a **2 clients** dans le réseau.

- 5- Tracer le réseau et expliciter la matrice P .
- 6- Déterminer les taux moyens de passage par les stations.
- 7- Quel est le nombre d'états du réseau ? Quelles sont les probabilités du vecteur d'état ?
Quelle est la condition de stabilité du réseau ?
- 3- Déterminer les probabilités d'état, le nombre moyen de clients dans chaque station.